

UFMG – 2003

4º DIA

MATEMÁTICA

Matemática – Questão 01

Sejam $f(x) = x^2 + 3x + 4$ e $g(x) = ax + b$ duas funções. **DETERMINE** as constantes reais **a** e **b** para que $(f \cdot g)(x) = (g \cdot f)(x)$ para todo x real.

RESOLUÇÃO:

$f(g(x)) = g(f(x))$, para todo x real. Logo:

$$(ax + b)^2 + 3(ax + b) + 4 = a(x^2 + 3x + 4) + b, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$a^2x^2 + 2abx + b^2 + 3ax + 3b + 4 = ax^2 + 3ax + 4a + b, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$a^2x^2 + (2ab + 3a)x + b^2 + 3b + 4 = ax^2 + 3ax + (4a + b), \forall x \in \mathbb{R}$$

Da identidade acima vem:

$$\begin{cases} a^2 = a \\ 2ab + 3a = 3a \\ b^2 + 3b + 4 = 4a + b \end{cases}$$

Resolvendo a primeira equação, encontramos $a = 1$ ou $a = 0$.

Para $a = 0$, a terceira equação não possui solução real, portanto não convém.

Já para $a=1$, temos

$2b=0$ e $b^2 + 2b = 0$, que nos dá $b = 0$.

Do exposto $a = 1$ e $b = 0$ satisfazem as três equações.

Matemática – Questão 02

Considere o sistema $\begin{cases} y + x^2 - 4x = -3 \\ y - ax = -2 \end{cases}$ com incógnitas x e y .

1. **CALCULE** os valores de a para os quais o sistema tem uma única solução.

2. **RESPONDA:**

Existe algum valor de a para o qual esse sistema tem mais de duas soluções?

JUSTIFIQUE sua resposta.

RESOLUÇÃO:

1. Resolvendo o sistema $\begin{cases} y = -x^2 + 4x - 3 \\ y = ax - 2 \end{cases}$ nas variáveis x e y , temos

$$-x^2 + 4x - 3 = ax - 2$$

$x^2 + (a - 4)x + 1 = 0$, que é uma equação do segundo grau.

Para que essa possua uma única solução, seu discriminante deve ser nulo, ou seja,

$$\Delta = (a - 4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$$

$$(a - 4)^2 = 4 \Rightarrow |a - 4| = 2.$$

Logo, $a = 2$ ou $a = 6$.

2. Não pode haver mais que duas soluções, porque uma equação do segundo grau nos dá no máximo duas soluções reais e distintas. Outra forma seria notar que as equações do sistema representam uma reta e uma parábola no plano cartesiano, daí no máximo dois pontos em comum entre as duas curvas.

Matemática – Questão 03

Considere a parábola de equação $y = 8x - 2x^2$ e a reta que contém os pontos $(4,0)$ e $(0,8)$. Sejam A e B os pontos da interseção entre a reta e a parábola. **DETERMINE** a equação da mediatriz do segmento AB.

RESOLUÇÃO:

Primeiro encontremos a equação da reta r que passa pelos pontos $(4,0)$ e $(0,8)$:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y = -2x + 8$$

Buscando a interseção entre a reta r : $y = -2x + 8$ e a parábola de equação $y = 8x - 2x^2$, temos $8x - 2x^2 = -2x + 8 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = 4$.

$$x = 1 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow A = (1,6).$$

$$x = 4 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow B = (4,0).$$

Encontremos agora a equação da mediatriz do segmento AB.

Seja $P = (x,y)$ um ponto genérico da mediatriz, da definição de reta mediatriz decorre que $d_{P,A} = d_{P,B}$ o que nos dá

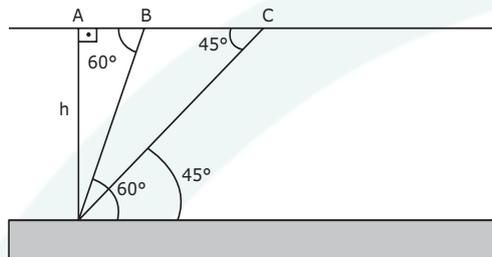
$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-6)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2} \Rightarrow 2x - 4y + 7 = 0, \text{ que é a equação pedida.}$$

Matemática – Questão 04

Um avião, em voo retilíneo horizontal, passa por um ponto na vertical acima da cabeça de uma pessoa situada no solo. Em um determinado momento, essa pessoa registra que o ângulo de elevação do avião, em relação ao solo, é de 60° e que, 15 segundos depois desse registro, é de 45° . Suponha que o avião voa a uma velocidade constante de 720 km/h e despreze a altura da pessoa. **CALCULE** a altura em que estava o avião quando passou acima da cabeça da pessoa.

RESOLUÇÃO:

Construindo uma figura da situação descrita temos:



Cálculo da medida do segmento BC:

$$v = 720 \text{ km/h} = 200 \text{ m/s.}$$

$$\text{Como } v = BC/\Delta t \text{ vem que } BC = v \cdot \Delta t = 200 \cdot 15 \text{ m} = 3\,000 \text{ m.}$$

No triângulo APC:

$$\text{tg}45^\circ = \frac{h}{AC} \Rightarrow AC = h.$$

No triângulo APB:

$$\text{tg}60^\circ = \frac{h}{AB} = \frac{h}{AC - BC} = \frac{h}{h - 3\,000} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{h - 3\,000}$$

Logo $h = 1\,500(3 + \sqrt{3})$ m, que é a altura pedida.

Matemática – Questão 05

Sabendo-se que $p(1 + 2i) = 0$, **CALCULE** todas as raízes do polinômio $p(x) = x^5 + x^4 + 13x^2 + 5x$.

RESOLUÇÃO:

Se $1 + 2i$ é raiz de $P(x)$ e seus coeficientes são todos reais, então $1 - 2i$ é raiz.

Logo $(x - 1 - 2i) \cdot (x - 1 + 2i) = x^2 - 2x + 5$ é fator de $P(x)$.

Dividindo $P(x)$ por $x^2 - 2x + 5$ encontramos $x^3 + 3x^2 + x$.

$x^3 + 3x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x^2 + 3x + 1) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x^2 + 3x + 1 = 0$.

$$x^2 + 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Do exposto, as raízes de $P(x)$ são 0 , $\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$, $\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$, $1 + 2i$ e $1 - 2i$.

Matemática – Questão 06

Um baralho é composto por 52 cartas divididas em quatro naipes distintos. Cada naipe é constituído por 13 cartas – 9 cartas numeradas de 2 a 10, mais Valete, Dama, Rei e Ás, representadas, respectivamente, pelas letras J, Q, K e A. Um par e uma trinca consistem, respectivamente, de duas e de três cartas de mesmo número ou letra. Um *full hand* é uma combinação de cinco cartas, formada por um par e uma trinca. Considerando essas informações, **CALCULE**

1. de quantas maneiras distintas se pode formar um *full hand* com um par de reis e uma trinca de 2.
2. de quantas maneiras distintas se pode formar um *full hand* com um par de reis.
3. de quantas maneiras distintas se pode formar um *full hand*.

RESOLUÇÃO:

1. Pelo princípio fundamental da contagem nas escolhas dos naipes do par de reis e da trinca de dois, temos

$$C_{4,2} \cdot C_{4,3} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 24.$$

2. De modo análogo ao item anterior e lembrando de escolher também um tipo de carta para formar a trinca, que não pode ser de reis, temos

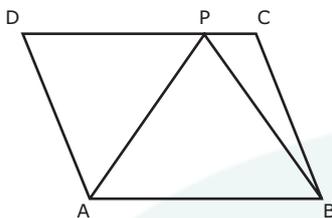
$$C_{4,2} \cdot C_{4,3} \cdot C_{12,1} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{12}{1} = 288.$$

3. Fazendo agora todas as escolhas possíveis (tipos de cartas e naipes dessas cartas) para formarmos um *full hand*, temos

$$C_{13,1} \cdot C_{4,2} \cdot C_{12,1} \cdot C_{4,3} = \frac{13}{1} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot \frac{12}{1} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 3744.$$

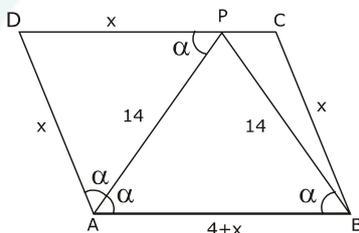
Matemática – Questão 07

No paralelogramo ABCD, da figura a seguir, o ponto P, contido no lado CD, é tal que o segmento PC mede 4 cm, os segmentos AP e PB medem 14 cm cada um e os ângulos \widehat{DAP} e \widehat{PAB} têm a mesma medida. **DETERMINE** a medida do lado AD.



RESOLUÇÃO:

Na figura seguinte chamemos de x a medida, em cm, do segmento AD. Notemos ainda que pelo fato de o quadrilátero ABCD ser um paralelogramo, podemos concluir que o ângulo DPA é congruente ao PAB (alternos e internos). Daí temos dois triângulos isósceles e semelhantes, que são os triângulos DAP e PAB (caso ângulo-ângulo), e o segmento AB mede $(x + 4)$ cm, pois PC mede 4 cm.



Da semelhança vem

$$\frac{x}{14} = \frac{14}{4+x} \Rightarrow x^2 + 4x - 196 = 0$$

$x = (10\sqrt{2} - 2)$ cm, que é a medida do segmento AD.

Matemática – Questão 08

Sejam n um número inteiro positivo e z um número complexo tal $z \neq 1$ que e $1 + z^{2n} \neq 0$.

CALCULE a parte imaginária de $\frac{z^n}{1+z^{2n}}$.

RESOLUÇÃO:

$$\text{Seja } w = \frac{z^n}{1+z^{2n}} = \frac{1}{\frac{1}{z^n} + \frac{z^{2n}}{z^n}} = \frac{1}{z^{-n} + z^n}.$$

Fazendo $z = 1 \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)$, já que seu módulo é 1, vem

$$w = \frac{1}{(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)^{-n} + (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)^n}.$$

Pela primeira fórmula de Moivre,

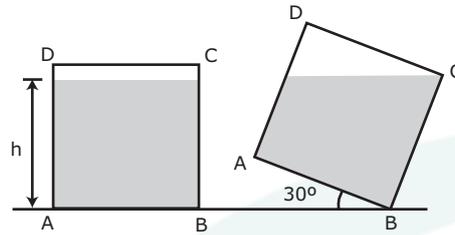
$$w = \frac{1}{\cos(-n\theta) + i \cdot \text{sen}(-n\theta) + \cos(n\theta) + i \cdot \text{sen}(n\theta)}$$

$$w = \frac{1}{\cos(n\theta) - i \cdot \text{sen}(n\theta) + \cos(n\theta) + i \cdot \text{sen}(n\theta)}$$

$$w = \frac{1}{2 \cdot \cos(n\theta)} \in \mathbb{R}, \text{ logo sua parte imaginária é zero.}$$

Matemática – Questão 09

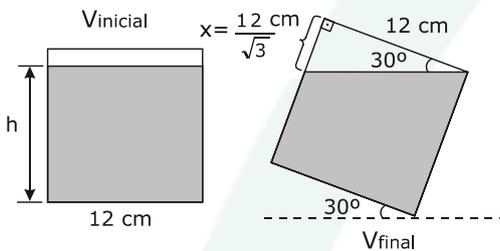
Um recipiente cúbico, sem tampa, com arestas medindo 12 cm, está apoiado em um plano horizontal e contém água até um nível de h cm. Ao se inclinar esse recipiente sobre uma de suas arestas, de maneira que a face inferior faça um ângulo de 30° com o plano horizontal, são derramados 300 cm^3 de água, conforme mostrado nestas figuras.



DETERMINE o valor de h .

RESOLUÇÃO:

No triângulo retângulo da figura temos $\text{tg}30^\circ = \frac{x}{12 \text{ cm}} \Rightarrow x = \frac{12}{\sqrt{3}} \text{ cm}$.



Cálculo dos volumes inicial e final de água contidos no recipiente:

$$V_{\text{inicial}} = 12 \cdot 12 \cdot h \text{ cm}^3 = 144 \cdot h \text{ cm}^3.$$

$$V_{\text{final}} = \left(12^3 - \frac{12}{2} \cdot \frac{12}{\sqrt{3}} \cdot 12 \right) \text{ cm}^3 = 288(6 - \sqrt{3}) \text{ cm}^3.$$

Do exposto vem

$$V_{\text{inicial}} = V_{\text{final}} + 300 \text{ cm}^3$$

$$144 \cdot h = 288(6 - \sqrt{3}) + 300$$

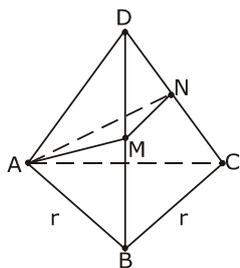
$$\text{Logo } h = \frac{169 - 24\sqrt{3}}{12}.$$

Matemática – Questão 10

Considere um tetraedro regular de vértices A, B, C e D, cujas arestas medem r .
Considere, ainda, que M e N são pontos médios das arestas BD e CD, respectivamente.
CALCULE a área do triângulo AMN.

RESOLUÇÃO:

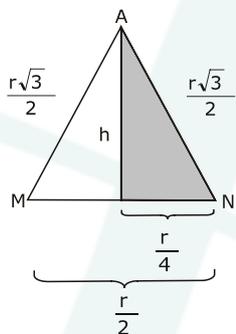
Todas as faces do tetraedro são triângulos equiláteros de lado r .



$MN = \frac{r}{2}$, pois é base média do triângulo BCD.

$AM = AN = \frac{r\sqrt{3}}{2}$, pois são alturas de triângulos equiláteros.

Notemos que o triângulo AMN é isósceles de base MN, logo



$$h^2 + \left(\frac{r}{4}\right)^2 = \left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow h = \frac{r\sqrt{11}}{4}.$$

Cálculo da área A do triângulo AMN:

$$A = \frac{\frac{r}{2} \cdot \frac{r\sqrt{11}}{4}}{2}$$

$$A = \frac{r^2\sqrt{11}}{16}.$$